

ПОВЕДЕНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ТРОЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ВБЛИЗИ РЕБРА НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

© М. БОРСУК

Ольштын, Польша

РЕЗЮМЕ. Мы исследуем поведение слабых решений краевых задач для уравнений, для которых модельным служит уравнение

$$-\frac{d}{dx_i}(r^\tau |u|^q |\nabla u|^{m-2} u_{x_i}) + a_0 r^{\tau-m} u |u|^{q+m-2} - \mu r^\tau |u|^{q-1} |\nabla u|^m \operatorname{sgn} u = f(x), \quad (\text{МУ})$$

$$r^2 = x_{n-1}^2 + x_n^2; \quad n \geq 3, \quad 0 \leq \mu < 1, \quad q \geq 0, \quad m > 1, \quad a_0 \geq 0, \quad \tau \geq m-2,$$

в окрестности ребра на границе области. Мы устанавливаем почти точный показатель скорости убывания решения.

Мы изучаем поведение слабых решений $u \in V$ краевых задач для эллиптических квазилинейных вырождающихся уравнений второго порядка в окрестности ребра границы области

$$\int_G \{a_i(x, u, u_x) \phi_{x_i} + a_0 a(x, u, u_x) \phi + b(x, u, u_x) \phi\} dx = \quad (BVP)$$

$$= \int_G f(x) \phi dx + \int_{\Gamma_2} \{g(x) - \sigma(x, u)\} \phi ds \quad \forall \phi \in V.$$

Краевые задачи для квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в гладких областях недавно начали интенсивно исследоваться. Менее изучены такие краевые задачи в негладких областях. Мы укажем лишь на работы [1-3, 5], относящиеся к изучению поведения слабых решений в окрестности конической граничной точки для специальных классов уравнений. В работе [4] исследовалась задача Дирихле для модельного уравнения (МУ) в области с ребром на границе. Данная работа является развитием работы [4].

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ограниченная $(n-1)$ -мерным многообразием ∂G и пусть Γ_1, Γ_2 — открытые непустые подмногообразия многообразия ∂G , обладающие следующими свойствами: $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\partial G = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$, причём $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$ является $(n-2)$ -мерным подмногообразием, содержащим ребро $\Gamma_0 \subseteq \overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$. Зафиксируем разбиение множества $\{0, 1, 2\}$ на два подмножества $\mathcal{N}$ и $\mathcal{D}$. Объединение подмногообразий Γ_j с $j \in \mathcal{D}$ составляет ту часть границы, на которой мы

задаём краевые условия Дирихле, а с $j \in \mathcal{N}$ - условие Неймана или третье краевое условие. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что $\{0, 1\} \in \mathcal{D}$. Если $2 \in \mathcal{D}$, то наша задача является задачей Дирихле; если $2 \in \mathcal{N}$, то задача является смешанной. Для точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ определим цилиндрические координаты $(\bar{x}, r, \omega)$: $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-2})$, $r = \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}$, $\omega = \arctg \frac{x_{n-1}}{x_n}$. Для достаточно малого $d > 0$ определим также множества:

$$G_0^d = G \cap \{(\bar{x}, r, \omega) \mid \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-2}, 0 < r < d, \omega \in (-\omega_0/2, \omega_0/2)\}; \quad 0 < \omega_0 < 2\pi;$$

$$\Gamma_j^d = \Gamma_j \cap \overline{G_0^d} \subset \partial G_0^d, \quad j = 0, 1, 2;$$

$$\Omega_d = G \cap \{(\bar{x}, r, \omega) \mid \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-2}, r = d, \omega \in [-\omega_0/2, \omega_0/2]\} \subset \partial G_0^d.$$

Предполагается, что:

- 1) $\partial G \setminus \Gamma_0$ является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$;
- 2) существует число $d > 0$ такое, что

$$\Gamma_0^d = \{(\bar{x}, 0, 0) \mid |\bar{x}| < d\} \subset \Gamma_0$$

является прямым ребром с серединой в начале координат;

- 3) G_0^d локально диффеоморфно двугранному углу

$$\mathbb{D}_d = \{(r, \omega) \mid 0 < r < d, \omega \in (-\omega_0/2, \omega_0/2)\} \times \mathbb{R}^{n-2}; \quad 0 < \omega_0 < 2\pi;$$

таким образом, предполагается, что $G_0^d \subset G$ и, следовательно, область G является "клином" в некоторой окрестности ребра.

- 4) $\omega|_{\Gamma_1} = -\omega_0/2; \quad \omega|_{\Gamma_2} = \omega_0/2.$

Пусть $L_m(G)$ и $W^{k,m}(G)$, $m > 1$ - обычные пространства Лебега и Соболева соответственно. Через $\mathfrak{N}_{m,q}^1(\nu, \nu_0, G)$ обозначим множество функций $u(x) \in L_\infty(G)$, обладающих слабыми производными первого порядка с конечным интегралом

$$\int_G (\nu(x)|u|^q |\nabla u|^m + \nu_0(x)|u|^{q+m}) dx < \infty, \quad q \geq 0,$$

где $\nu_0(x)$ и $\nu(x)$ - две неотрицательные измеримые в G функции, такие что

$$\begin{aligned} \nu_0^{-1}(x) \in L_t(G), \quad \nu^{-1}(x) \in L_t(G); \quad \nu_0(x) \in L_s(G), \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{t} < \frac{m}{n}; \quad n > m > 1; \\ 1 + \frac{1}{t} < m < n \left(1 + \frac{1}{t}\right), \quad t > \max\left(n, \frac{n}{m-1}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Если $X(G)$ - одно из пространств, то через $X(G, \Gamma) \forall \Gamma \subseteq \partial G$ обозначаем подмножество функций $u(x) \in X(G)$, обращающихся в нуль на Γ в смысле следов. Наконец, определим пространство V :

$$V := \begin{cases} \mathfrak{N}_{m,q}^1(\nu, \nu_0, G, \partial G), & \text{если (BVP) - задача Дирихле;} \\ \mathfrak{N}_{m,q}^1(\nu, \nu_0, G, \partial G \setminus \Gamma_2), & \text{если (BVP) - смешанная задача.} \end{cases}$$

Положим также: $V_0 = V$ для $q = 0$.

Мы получаем почти точную оценку в окрестности ребра Γ_0 для модуля слабого решения $u(x)$ задачи (BVP). Относительно нашей задачи будем предполагать следующее:

Пусть заданы числа $1 < m < n, l > n, q \geq 0, 0 \leq \mu < 1$ и неотрицательные функции $\alpha(x), \alpha_0(x), b_0(x)$.

1) $f(x), \alpha(x), \alpha_0(x), b_0(x), g(x)$ - измеримые функции такие, что:

$$\nu_0^{-1}(x)(\alpha_0(x) + b_0(x) + f(x)) \in L_p(G); \quad \alpha(x) \in L_{m'}(G); \quad g(x) \in L_\alpha(\Gamma_2);$$

$$\frac{1}{p} < \frac{m}{n} - \frac{1}{t} - \frac{1}{s}, \quad \alpha > \frac{n-1}{m-1-\frac{n}{t}}, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1.$$

$a_i(x, u, \xi), i = 1, \dots, n; a(x, u, \xi), b(x, u, \xi), \sigma(x, u)$ - функции Каратеодори: $G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, обладающие свойствами:

2) $a_i(x, u, \xi)\xi_i \geq \nu(x)|u|^q|\xi|^m - \alpha_0(x); a(x, u, \xi)u \geq \nu_0(x)|u|^{q+m}; \sigma(x, u) \cdot \operatorname{sgn} u \geq 0;$

3) $|b(x, u, \xi)| \leq \mu\nu(x)|u|^{q-1}|\xi|^m + b_0(x);$

4) $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2(x, u, \xi)} \leq \nu(x)|u|^q|\xi|^{m-1} + \nu^{\frac{1}{m}}(x)\nu_0^{1/m'}(x)|u|^{q+m-1} + \alpha(x)\nu^{\frac{1}{m}}(x);$

5) $|a(x, u, \xi)| \leq \nu^{\frac{1}{m}}(x)\nu_0^{1/m}(x)|u|^q|\xi|^{m-1} + \nu_0(x)|u|^{q+m-1} + \alpha(x)\nu_0^{1/m}(x)|u|^q;$

6) $\int_{\Gamma_2} |\sigma(x, u)| ds < \infty \quad \forall u \in L_\infty(G \cup \Gamma_2).$

В начале с помощью техники u -уровневых множеств Стампаккьи мы получаем $L_\infty(G)$ -априорную оценку слабых решений:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(x)$ - слабое решение задачи (BVP) и пусть выполнены предположения (1), 1) - 6). Тогда существует такая постоянная $M_0 > 0$, зависящая лишь от $\|g\|_{L_\alpha(\Gamma_2)}, \|\nu^{-1}(x), \nu_0^{-1}(x)\|_{L_t(G)}, \|\nu_0^{-1}(x)(\alpha_0(x) + b_0(x) + f(x))\|_{L_p(G)}$, $\operatorname{mes} G, \omega_0, n, m, \mu, q, p, t, s, a_0$ и независящая от $u(x)$, что

$$\|u\|_{L_\infty(G)} \leq M_0.$$

Дополнительно предполагаем: функции $a_i(x, u, \xi), a(x, u, \xi), b(x, u, \xi), \sigma(x, u)$ - непрерывно дифференцируемы по переменным x, u, ξ на множестве $\mathfrak{M}_{d, M_0} = \overline{G_0^d} \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют в $\mathfrak{M}_{d, M_0}$ следующим соотношениям:

7) $(m-1)u \frac{\partial a_i(x, u, \xi)}{\partial u} = q \frac{\partial a_i(x, u, \xi)}{\partial \xi_j} \xi_j; i = 1, \dots, n;$

8) $\frac{\partial a_i(x, u, \xi)}{\partial \xi_j} p_i p_j \geq \gamma_{m, q} \nu(x)|u|^q|\xi|^{m-2} p^2, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$

9) $\sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial b(x, u, \xi)}{\partial \xi_i} \right|^2} \leq \nu(x)|u|^{q-1}|\xi|^{m-1};$

10) $\frac{\partial b(x, u, \xi)}{\partial u} \geq \nu(x)|u|^{q-2}|\xi|^m; \quad \frac{\partial a(x, u, \xi)}{\partial u} \geq \gamma_{m, q} \nu_0(x)|u|^{q+m-2}; \quad \frac{\partial \sigma(x, u)}{\partial u} \geq 0;$

11) $\sqrt{\sum_{i=1}^n \left| a_i(x, u, \xi) - r^\tau |u|^q |\xi|^{m-2} \xi_i \right|^2} \leq c_1(r) r^\tau |u|^q |\xi|^{m-1} + \psi_1(r);$

$$12) \left| \frac{\partial a_i(x, u, \xi)}{\partial \xi_j} - r^\tau |u|^q |\xi|^{m-4} (\delta_i^j |\xi|^2 + (m-2) \xi_i \xi_j) \right| \leq c_2(r) r^\tau |u|^q |\xi|^{m-2} + c_2(r) \psi_2(r) |u|^{\frac{q}{m-1}};$$

$$13) \left| \frac{\partial a_i(x, u, \xi)}{\partial x_i} - \tau r^{\tau-2} |u|^q |\xi|^{m-2} x_i \xi_i \right| \leq c_3(r) r^{\tau-1} |u|^q |\xi|^{m-1} + \psi_3(r);$$

$$14) \left| a(x, u, \xi) - r^{\tau-m} u |u|^{q+m-2} \right| + \left| b(x, u, \xi) + \mu r^\tau u |u|^{q-2} |\xi|^m \right| \leq c_4(r) r^\kappa |u|^q |\xi|^{m-1} + |u|^q \psi_4(r),$$

где $\gamma_{m,q} > 0$, $c_i(r)$ — неотрицательные непрерывные в нуле функции с $c_i(0) = 0$; кроме того пусть существуют числа $k_i \geq 0$ такие, что $\psi_i(r) \leq k_i r^{\beta_i}$, $i = 1, \dots, 4$;

$$\beta_1 = \frac{l(n-1) - n(m-1)}{l(n-m)} \tau - \frac{2}{l}(m-1) + \lambda(q+m-1);$$

$$\beta_2 = \tau - m + 2 + \lambda(q+m-1) \frac{m-2}{m-1}; \quad \beta_3 = \tau - m + \lambda(q+m-1);$$

$$\beta_4 = \frac{(l-m)n}{l(n-m)} \tau - \frac{2}{l}m + \lambda(m-1), \quad \kappa = \frac{l(n-m+1) - n}{l(n-m)} \tau - \frac{2}{l} + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Наши предположения 11) - 14) по существу означают, что коэффициенты задачи (BVP) вблизи ребра Γ_0 аппроксимируются по непрерывности коэффициентами модельного уравнения (МУ).

Определим теперь число

$$\theta_0 := \begin{cases} \frac{1}{2} \omega_0, & \text{для задачи Дирихле;} \\ \omega_0, & \text{для смешанной задачи,} \end{cases}$$

и пусть λ является наименьшим положительным решением уравнения

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{[(m-1)y^2 + \lambda^2] (y^2 + \lambda^2)^{\frac{m-4}{2}} dy}{(m-1+q+\mu)(y^2 + \lambda^2)^{\frac{m}{2}} + \lambda(2-m+\tau)(y^2 + \lambda^2)^{\frac{m-2}{2}} - a_0} = \theta_0, \\ \lambda^m(q+m-1+\mu) + \lambda^{m-1}(2-m+\tau) > a_0. \end{cases} \quad (2)$$

Наше основное утверждение заключается в следующей теореме:

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $u(x)$ — слабое решение задачи (BVP). Пусть выполнены вышеуказанные предположения при $m \geq 2$. Пусть существуют неотрицательные постоянные f_1, g_1 такие, что

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq f_1 r^{\tau-m+\lambda(q+m-1)}, \quad x \in G_0^d; \\ |g(x)| &\leq g_1 r^{\tau-m+1+\lambda(q+m-1)}, \quad x \in \Gamma_2 \cap \overline{G_0^d}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ существует постоянная $c_\varepsilon > 0$, зависящая лишь от параметров и норм функций, фигурирующих в сделанных предположениях, и независящая от решения $u(x)$, такая что

$$|u(x)| \leq c_\varepsilon r^{\lambda-\varepsilon}. \quad (4)$$

Основная теорема доказывается путём применения барьерной техники и слабого принципа сравнения, специально доказываемого для задачи (BVP) . Последний обобщает известные результаты для задачи Дирихле (см., напр., [5]).

Рассмотрим квазилинейный вырождающийся оператор второго порядка Q вида:

$$Q(v, \phi) \equiv \int_G \left\langle A_i(x, v_x) \phi_{x_i} + A(x, v) \phi + B(x, v, v_x) \phi - \right. \\ \left. - f(x) \phi \right\rangle dx + \int_{\Gamma_2} \left\langle \Sigma(x, v) - g(x) \right\rangle \phi ds$$

для $v \in V_0$ и всех неотрицательных $\phi \in V_0$ при следующих предположениях: функции $f(x), g(x)$ — суммируемы на G и Γ_2 соответственно; функции $A(x, v)$, $B(x, v, \eta)$, $A_i(x, \eta)$, $\Sigma(x, v)$ — непрерывно дифференцируемы по переменным v, η на множестве $\mathbb{M} = \bar{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют на $\mathbb{M}$ неравенствам:

$$(i) \quad \frac{\partial A_i(x, \eta)}{\partial \eta_j} p_i p_j \geq \gamma_m \nu(x) |\eta|^{m-2} p^2, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$

$$(ii) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial B(x, v, \eta)}{\partial \eta_i} \right|^2} \leq \nu(x) |v|^{-1} |\eta|^{m-1};$$

$$(iii) \quad \frac{\partial B(x, v, \eta)}{\partial v} \geq \nu(x) |v|^{-2} |\eta|^m; \quad \frac{\partial A(x, v)}{\partial v} \geq \gamma_m \nu_0(x) |v|^{m-2}; \quad \frac{\partial \Sigma(x, v)}{\partial v} \geq 0;$$

здесь: $m > 1$; $\gamma_m > 0$; $\nu_0(x), \nu(x)$ — функции, определённые посредством (1).

Принцип сравнения.

Пусть оператор Q удовлетворяет предположениям (i) — (iii). Пусть функции $v, w \in V_0$ удовлетворяют неравенству

$$Q(v, \phi) \leq Q(w, \phi)$$

для всех неотрицательных $\phi \in V_0$. Пусть, кроме того, выполнено в слабом смысле неравенство

$$v(x) \leq w(x) \text{ на } \partial G \setminus \Gamma_2.$$

Тогда

$$v(x) \leq w(x) \text{ почти всюду в } G. \quad (5)$$

Доказательство. Определим функции $z = v - w$; $v^t = tv + (1 - t)w$, $t \in [0, 1]$. Тогда получим:

$$0 \geq Q(v, \phi) - Q(w, \phi) = \int_{\Omega} \left\langle \phi_{x_i} z_{x_j} \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, v_x^t)}{\partial v_{x_j}^t} dt + z \phi \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{A}(x, v^t)}{\partial v^t} dt + \right. \\ \left. + \phi z_{x_i} \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{B}(x, v^t, v_x^t)}{\partial v_{x_i}^t} dt + \phi z \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{B}(x, v^t, v_x^t)}{\partial v^t} dt \right\rangle dx + \int_{\partial_2 \Omega} \phi z \int_0^1 \frac{\partial \Sigma(x, v^t)}{\partial v^t} dt ds \quad (6)$$

для всех неотрицательных $\phi \in V_0$.

Пусть $k \geq 1$ — пока произвольное нечётное число. Введём множество $\Omega_+ := \{x \in \bar{\Omega} \mid v(x) > w(x)\}$. Выберем в качестве пробной функции в неравенстве (6) функцию $\phi = \max\{(v - w)^k, 0\}$. В силу предположений (i) - (iii) получаем

$$k\gamma_m \int_{\Omega_+} \nu(x) z^{k-1} \left(\int_0^1 |\nabla v^t|^{m-2} dt \right) |\nabla z|^2 dx + \gamma_m \int_{\Omega_+} \nu_0(x) z^{k+1} \left(\int_0^1 |v^t|^{m-2} dt \right) dx + \\ + \int_{\Omega_+} \nu(x) z^{k+1} \left(\int_0^1 |v^t|^{-2} |\nabla v^t|^m dt \right) dx \leq \int_{\Omega_+} \nu(x) z^k \left(\int_0^1 |v^t|^{-1} |\nabla v^t|^{m-1} dt \right) |\nabla z| dx. \quad (7)$$

Применим теперь неравенство Коши

$$z^k |\nabla z| |v^t|^{-1} |\nabla v^t|^{m-1} = \left(|v^t|^{-1} z^{\frac{k+1}{2}} |\nabla v^t|^{m/2} \right) \cdot \left(z^{\frac{k-1}{2}} |\nabla z| |\nabla v^t|^{m/2-1} \right) \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} |v^t|^{-2} z^{k+1} |\nabla v^t|^m + \frac{1}{2\varepsilon} z^{k-1} |\nabla z|^2 |\nabla v^t|^{m-2} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Отсюда, полагая $\varepsilon = 2$, из (7) получим

$$\left(k\gamma_m - \frac{1}{4} \right) \int_{\Omega_+} \nu(x) z^{k-1} |\nabla z|^2 \left(\int_0^1 |\nabla v^t|^{m-2} dt \right) dx \leq 0. \quad (8)$$

Выбирая теперь нечётное число $k \geq \max\left(1; \frac{1}{2\gamma_m}\right)$, в силу того, что $z(x) \equiv 0$ почти

всюду на $\partial\Omega_+$, получим из (8), что $z(x) \equiv 0$ почти всюду в Ω_+ . Мы пришли к противоречию с нашим определением множества Ω_+ . Поэтому (5) доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно проверить, что оператор Q , порождённый модельным уравнением (МУ) при $q = 0$, удовлетворяет предположениям (i) - (iii).

Далее мы доказываем сильный принцип максимума Хопфа. В дополнение к (i) - (iii) будем предполагать ещё выполненным неравенство

$$(v) \quad |\eta| \cdot \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \eta)}{\partial \eta_i} \right| + \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \eta)}{\partial x_i} \right| + |\mathcal{B}(x, v, \eta) + \mu \nu(x) v^{-1} |\eta|^m| \leq \tilde{\gamma}_m \nu(x) |\eta|^{m-1}$$

с некоторыми неотрицательными постоянными $\tilde{\gamma}_m, \mu$.

ЛЕММА 1. Пусть $B_d(y)$ — открытый шар радиуса $d > 0$ с центром в y , содержащийся в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и $v(x) \in \mathfrak{N}_{m,0}^1(\nu, \nu_0, B_d(y)) \cap C^1(\overline{B_d(y)})$ — решение уравнения

$$Q_0(v, \phi) \equiv \int_{B_d(y)} \langle \mathcal{A}_i(x, v_x) \phi_{x_i} + \mathcal{B}(x, v, v_x) \phi \rangle dx = 0 \quad (9)$$

для всех неотрицательных $\phi \in L_\infty(B_d(y)) \cap W^{1,m}(B_d(y), \partial B_d(y))$. Пусть выполнены предположения (i) — (v). Предположим также, что

$$v(x) > 0, \quad x \in B_d(y), \quad v(x_0) = 0 \text{ в некоторой точке } x_0 \in \partial B_d(y)$$

Тогда

$$|\nabla v(x_0)| \neq 0. \quad (10)$$

Доказательство. Рассмотрим шаровой слой $\mathcal{R} = B_d(y) \setminus B_{d/2}(y) = \{x \mid \frac{d}{2} < |x - y| < d\}$ и функцию $w(x) = e^{-\sigma|x-y|^2} - e^{-\sigma d^2}$, $x \in \mathcal{R}$, $\sigma > 0$. Прямые вычисления дают:

$$0 \leq w(x) \leq e^{-\sigma|x-y|^2}; \quad (11)$$

$$w_{x_i} = -2\sigma(x_i - y_i)e^{-\sigma|x-y|^2}; \quad |\nabla w| = 2\sigma|x - y|e^{-\sigma|x-y|^2}; \quad (12)$$

$$w_{x_i x_j} = \langle 4\sigma^2(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\sigma\delta_i^j \rangle e^{-\sigma|x-y|^2}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varepsilon w) &\equiv -\frac{d\mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{dx_i} + \mathcal{B}(x, \varepsilon w, \varepsilon w_x) = \\ &= -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{\partial(\varepsilon w_{x_j})} w_{x_i x_j} - \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{\partial x_i} + \mathcal{B}(x, \varepsilon w, \varepsilon w_x) = \\ &= -4\varepsilon\sigma^2 e^{-\sigma|x-y|^2} \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{\partial(\varepsilon w_{x_j})} (x_i - y_i)(x_j - y_j) + \\ &+ 2\varepsilon\sigma e^{-\sigma|x-y|^2} \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{\partial(\varepsilon w_{x_i})} - \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{\partial x_i} + \mathcal{B}(x, \varepsilon w, \varepsilon w_x). \end{aligned}$$

В силу предположений (i), (v) отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varepsilon w) &\leq -\varepsilon^{m-1}\nu(x)|\nabla w|^{m-2}e^{-\sigma|x-y|^2} \cdot \langle 4\gamma_m|x-y|^2\sigma^2 - 2\tilde{\gamma}_m\sigma - 4|x-y|\tilde{\gamma}_m\sigma \rangle - \\ &- \mu\varepsilon^{m-1}\nu(x)w^{-1}|\nabla w|^m, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (14) \end{aligned}$$

На основании (11), (12) заметим, что $\frac{|\nabla w|}{w} > 2\sigma|x-y|$ и поэтому из (14) следует, что в слое $\mathcal{R}$ выполнено:

$$\mathcal{L}(\varepsilon w) \leq -\varepsilon^{m-1}\nu(x)|\nabla w|^{m-2}e^{-\sigma|x-y|^2} \cdot \langle (\gamma_m + \mu)d^2\sigma^2 - 2(1 + 2d)\tilde{\gamma}_m\sigma \rangle.$$

Если выбрать теперь $\sigma \geq \frac{2(1+2d)\tilde{\gamma}_m}{(\gamma_m+\mu)d^2}$, то получим

$$\mathcal{L}(\varepsilon w) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{R}, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (15)$$

Так как $v > 0$ на $\partial B_{d/2}(y)$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $v - \varepsilon w \geq 0$ на $\partial B_{d/2}(y)$. Это неравенство выполнено и на $\partial B_d(y)$, где $w = 0$. В силу (15) получаем

$$Q_0(\varepsilon w, \phi) = \int_{B_d(y)} \phi \mathcal{L}(\varepsilon w) dx \leq 0 = Q_0(v, \phi).$$

Таким образом имеем:

$$\begin{cases} Q_0(v, \phi) \geq Q_0(\varepsilon w, \phi) \text{ в } \mathcal{R}; \\ v \geq \varepsilon w \text{ на } \partial \mathcal{R}. \end{cases} \quad (16)$$

На основании слабого принципа максимума из (16) следует, что $v \geq \varepsilon w$ всюду в $\mathcal{R}$. Так как $x_0 \in \partial B_d(y)$ и $w(x_0) = 0$ получаем: $\frac{v(x) - v(x_0)}{|x - x_0|} \geq \varepsilon \frac{w(x) - w(x_0)}{|x - x_0|}$ и поэтому $|\nabla v(x_0)| \geq \varepsilon |\nabla w(x_0)| = 2\varepsilon \sigma d e^{-\sigma d^2} > 0$, что означает (10).

Сильный принцип максимума Хопфа. Пусть Ω — связное множество и $v(x) \in \mathcal{N}_{m,0}^1(\nu, \nu_0, \Omega) \cap C^1(\Omega)$ — неотрицательное слабое решение уравнения

$$\int_{\Omega} \langle \mathcal{A}_i(x, v_x) \phi_{x_i} + \mathcal{B}(x, v, v_x) \phi \rangle dx = 0$$

для всех неотрицательных $\phi \in V_0$. Предположим, что $v(x) \not\equiv 0$. Пусть выполнены предположения (i) — (v). Тогда $v(x) > 0$, $x \in \Omega$.

Доказательство. Применяя метод от противного, предположим, что $v(x_0) = 0$ в некоторой точке $x_0 \in \Omega$. Тогда можно найти шар $B_d(y) \subset \Omega$, удовлетворяющий предположениям леммы 1, то-есть такой, что $x_0 \in \partial B_d(y)$. По этой лемме имеем, что $|\nabla v(x_0)| \neq 0$. Но $0 = v(x_0) = \inf_{x \in \Omega} v(x)$ и поэтому $|\nabla v(x_0)| = 0$. Получили противоречие. Поэтому заключение теоремы верно.

Докажем ещё одно свойство слабых решений задачи (BVP).

ЛЕММА 2. Пусть $u(x)$ — слабое решение задачи (BVP) и пусть выполнены предположения 2), 3) с $\alpha_0(x) \equiv 0$, $b_0(x) \equiv 0$. Если, кроме того, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ почти всюду в G , то $u(x) \geq 0$ почти всюду в G .

Доказательство. В качестве пробной функции в задаче (BVP) возьмём функцию $\phi = u^- = \max\{-u(x), 0\}$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \int_G \left\langle a_i(x, -u^-, -u_x^-)(-u_{x_i}^-) + a_0 \cdot a(x, -u^-, -u_x^-)(-u^-) + b(x, -u^-, -u_x^-)(-u^-) + \right. \\ \left. + f(x)u^- \right\rangle dx = - \int_{\Gamma_2} \langle (-u^-)\sigma(x, -u^-) + g(x)u^- \rangle ds. \end{aligned}$$

В силу предположений 2), 3)

$$\begin{aligned} (1 - \mu) \int_G \nu(x) |u^-|^q |\nabla u^-|^m dx + a_0 \int_G \nu_0(x) |u^-|^{q+m} dx \leq \\ \leq - \int_G f u^- dx - \int_{\Gamma_2} \langle (-u^-) \sigma(x, -u^-) + g(x) u^- \rangle ds \leq 0, \end{aligned}$$

так как $u^- \geq 0$. Но так как $\mu < 1, a_0 \geq 0$ и $u|_{\partial G \setminus \Gamma_2} = 0$ получаем $u^-(x) = 0$ почти всюду в G , то-есть $u(x) \geq 0$ почти всюду в G .

Далее строим барьерную функцию вида

$$w = r^\lambda \Phi(\omega), \quad \omega \in \left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right], \quad 0 < \omega_0 < 2\pi, \quad \lambda > 0 \quad (17)$$

как решение однородной задачи

$$\begin{cases} \mathfrak{L}w \equiv -\frac{d}{dx_i} \left(r^\tau |w|^q |\nabla w|^{m-2} w_{x_i} \right) + a_0 r^{\tau-m} w |w|^{q+m-2} - \mu r^\tau w |w|^{q-2} |\nabla w|^m = 0, \\ \hspace{25em} x \in G_0, \\ w(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2; \hspace{5em} \text{для задачи Дирихле;} \hspace{2em} (BVP)_0 \\ w(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1; \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_2 \quad \text{для смешанной задачи;} \\ a_0 \geq 0, \quad 0 \leq \mu < 1, \quad q \geq 0, \quad m \geq 2, \quad \tau \geq m-2 \end{cases}$$

в n - мерном бесконечном двугранном угле

$$G_0 = \left\{ x = (\bar{x}, r, \omega) \mid \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad 0 < r < \infty, \quad -\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2}, \quad \omega_0 \in (0, 2\pi) \right\}$$

с ребром $\Gamma_0 = \{(\bar{x}, 0, 0) \mid \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, содержащим начало координат, и боковыми гранями

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{ (\bar{x}, r, -\frac{\omega_0}{2}) \mid \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad 0 < r < \infty \right\}; \\ \Gamma_2 &= \left\{ (\bar{x}, r, +\frac{\omega_0}{2}) \mid \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad 0 < r < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Для функции $\Phi(\omega)$ получаем следующую краевую задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\omega} \left[\left(\lambda^2 \Phi^2 + \Phi'^2 \right)^{\frac{m-2}{2}} |\Phi|^q \Phi' \right] + \lambda [\lambda(q+m-1) - m + 2 + \tau] \Phi |\Phi|^q \times \\ \times \left(\lambda^2 \Phi^2 + \Phi'^2 \right)^{\frac{m-2}{2}} = a_0 \Phi |\Phi|^{q+m-2} - \mu \Phi |\Phi|^{q-2} \left(\lambda^2 \Phi^2 + \Phi'^2 \right)^{\frac{m}{2}}, \hspace{2em} (EVP) \\ \hspace{25em} \omega \in (-\omega_0/2, \omega_0/2), \\ \Phi(-\omega_0/2) = \Phi(\omega_0/2) = 0 \hspace{5em} \text{для задачи Дирихле;} \\ \Phi(-\omega_0/2) = \Phi'(\omega_0/2) = 0 \hspace{5em} \text{для смешанной задачи.} \end{cases}$$

Для решения задачи (EVP) положим $\Phi'/\Phi = y$, в результате приходим к задаче Коши для $y(\omega)$:

$$\begin{cases} [(m-1)y^2 + \lambda^2] (y^2 + \lambda^2)^{\frac{m-4}{2}} y' + (m-1+q+\mu)(y^2 + \lambda^2)^{\frac{m}{2}} + \\ \quad + \lambda(2-m+\tau)(y^2 + \lambda^2)^{\frac{m-2}{2}} = a_0, & \omega \in (-\omega_0/2, \omega_0/2), \\ y(0) = 0 & \text{для задачи Дирихле;} \\ y(\omega_0/2) = 0 & \text{для смешанной задачи.} \end{cases} \quad (CPDE)$$

На основании неравенства в (2) проверяется, что $y'(\omega) < 0$, $\omega \in (-\omega_0/2, \omega_0/2)$; поэтому $y(\omega)$ убывает на интервале $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$. Заметим также, что решения задачи (EVP) определяются однозначно с точностью до постоянного множителя. Будем рассматривать решения, нормированные условием

$$1 = \begin{cases} \Phi(0) & \text{для задачи Дирихле;} \\ \Phi(\frac{\omega_0}{2}) & \text{для смешанной задачи.} \end{cases}$$

Далее устанавливаются такие свойства функции $\Phi(\omega)$: $\Phi(\omega) \geq 0$, $\Phi''(\omega) < 0 \forall \omega \in (-\omega_0/2, \omega_0/2)$. Перейдём к вопросу о разрешимости задачи (CPDE). Переписывая уравнение задачи (CPDE) в виде, разрешённом относительно производной $y' = g(y)$, заметим, что $g(y) \neq 0 \forall y \in \mathbb{R}$. Кроме того, $g(y)$ и $g'(y)$, будучи рациональными функциями с ненулевым знаменателем, являются функциями непрерывными. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует однозначная разрешимость задачи (CPDE) в интервале $(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2})$. Интегрируя, получаем

$$\Phi(\omega) = \exp \begin{cases} \int_0^\omega y(\xi) d\xi & \text{для задачи Дирихле;} \\ \int_{\omega_0/2}^\omega y(\xi) d\xi & \text{для смешанной задачи.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{[(m-1)z^2 + \lambda^2](z^2 + \lambda^2)^{\frac{m-4}{2}} dz}{(m-1+q+\mu)(z^2 + \lambda^2)^{\frac{m}{2}} + \lambda(2-m+\tau)(z^2 + \lambda^2)^{\frac{m-2}{2}} - a_0} = \\ = \begin{cases} -\omega & \text{для задачи Дирихле;} \\ \frac{\omega_0}{2} - \omega & \text{для смешанной задачи.} \end{cases} \end{aligned}$$

В силу (2) отсюда в частности получим, что $\lim_{\omega \rightarrow -\frac{\omega_0}{2}+0} y(\omega) = +\infty$. Последнее позволяет доказать разрешимость задачи (EVP). Выражение (2) даёт уравнение для точного нахождения показателя λ в (17). Этот показатель можно явно вычислить в случае $a_0 = 0$; полученную величину обозначим через λ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{4\theta_0(m-1+q+\mu)} \left\{ \frac{m(m-2) - 2(m-2)t_0 - t_0^2}{t_0 + 2(m-2)} + \sqrt{\frac{[t_0^2 + 2(m-2)t_0 + m^2][t_0^2 + 2(m-2)t_0 + (m-2)^2]}{t_0 + 2(m-2)}} \right\},$$

где $t_0 = \frac{2\theta_0}{\pi}(2 - m + \tau)$. Легко видеть, что $\lambda_0 > 0$. Кроме того, применяя теорему о неявной функции, получаем, что в некоторой окрестности точки $(\lambda_0, 0)$ уравнение (2) определяет $\lambda = \lambda(a_0, \omega_0)$ как однозначную непрерывную функцию переменной a_0 , непрерывно зависящую от параметра ω_0 и имеющую непрерывные частные производные $\frac{\partial \lambda}{\partial a_0}, \frac{\partial \lambda}{\partial \omega_0}$. Затем исследуются свойства λ как функции $\lambda(a_0, \omega_0)$: функция $\lambda(a_0, \omega_0)$ **возрастает по переменной a_0 и убывает по переменной ω_0** . Применяя метод аналитического продолжения, получим разрешимость уравнения (2) для $\forall a_0$.

ПРИМЕР. Пусть $m = 2$ и рассмотрим задачу $(BVP)_0$ для уравнения

$$\frac{d}{dx_i} (r^\tau |w|^q u_{x_i}) = a_0 r^{\tau-2} w |w|^q - \mu r^\tau w |w|^{q-2} |\nabla w|^2, \quad x \in G_0,$$

$$a_0 \geq 0, 0 \leq \mu < 1, q \geq 0, \tau \geq 0.$$

Решением этой задачи является функция

$$w(r, \omega) = r^\lambda \times \begin{cases} \cos^{\frac{1}{1+q+\mu}} \left(\frac{\pi \omega}{\omega_0} \right) & \text{для задачи Дирихле;} \\ \cos^{\frac{1}{1+q+\mu}} \left(\frac{\pi \omega}{2\omega_0} - \frac{\pi}{4} \right) & \text{для смешанной задачи,} \end{cases}$$

причём

$$\lambda = \frac{\sqrt{\tau^2 + (\pi/\theta_0)^2 + 4a_0(1+q+\mu)} - \tau}{2(1+q+\mu)}.$$

Неравенство для λ в (2) принимает вид $(1+q+\mu)\lambda^2 + \lambda\tau > a_0$ и мы видим, что оно выполняется. Прямым вычислением проверяем, что $w(x) \in \mathfrak{N}_{2,0}^1(r^\tau, r^{\tau-m}, G_0^d)$, если $q+\mu < 1$, и $w(x) \notin \mathfrak{N}_{2,0}^1(r^\tau, r^{\tau-m}, G_0^d)$, если $q+\mu \geq 1$; в последнем случае имеем $w(x) \in \mathfrak{N}_{2,q}^1(r^\tau, r^{\tau-m}, G_0^d)$.

Наконец, можно перейти к доказательству Основной теоремы. Для этого вначале производим замену функции

$$u = v|v|^{t-1}; \quad t = \frac{m-1}{q+m-1}.$$

Благодаря предположению 7) задача (BVP) принимает вид:

$$Q(v, \phi) \equiv \int_G \left\langle \mathcal{A}_i(x, v_{x_i}) \phi_{x_i} + a_0 \mathcal{A}(x, v) \phi + \mathcal{B}(x, v, v_x) \phi - \right. \\ \left. - f(x) \phi \right\rangle dx + \int_{\Gamma_2} \left\langle \Sigma(x, v) - g(x) \right\rangle \phi ds = 0$$

для $v(x) \in V_0$ и любой $\phi(x) \in V_0$.

Далее, используя построенную выше барьерную функцию, применяем принцип сравнения. Для этого на основании предположений 8) - 10) проверяется, что выполнены все условия (i) - (iii) принципа сравнения.

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу предположения 7) коэффициенты $a_i(x, u, u_x), i = 1, \dots, n$ после вышеуказанной замены функции не зависят явно от v . Например, для модельного уравнения (МУ) это предположение выполняется; действительно, после указанной замены уравнение (МУ) принимает вид:

$$\mathcal{L}_0 v(x) \equiv -t^{m-1} \frac{d}{dx_i} (r^\tau |\nabla v|^{m-2} v_{x_i}) + a_0 r^{\tau-m} v |v|^{m-2} - \mu t^m r^\tau v^{-1} |\nabla v|^m = f(x), \quad x \in G.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борсук М.В., *Оценки решений задачи Дирихле для эллиптических нелинейных уравнений второго порядка в окрестности конической граничной точки*, Дифференциальные уравнения **30** (1994), no. 1, 104-108.
2. Борсук М.В., *Оценки обобщенных решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в области с конической граничной точкой*, Дифференциальные уравнения **31** (1995), 1001-1007.
3. Borsuk M.V., Dobrowolski M., *On the behavior of solutions of the Dirichlet problem for a class of degenerate elliptic equations in the neighborhood of conical boundary points*, Nonlinear boundary value problems **9** (1999), 29-34.
4. Borsuk M., Portnyagin D., *On the Dirichlet problem for a quasilinear elliptic second order equation with triple degeneracy and singularity in a domain with edge on the boundary*, GAKUTO Intern. Ser. Math. Sci. and Applications **14** (2000), 47-60.
5. Tolksdorf P., *On the Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations in domains with conical boundary points*, Comm. Part. Different. Equat. **8** (1983), 773-817.

CHAIR OF ANALYSIS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS
UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
10-957 OLSZTYN-KORTOWO, POLAND
E-mail address: borsuk@uwm.edu.pl